代数上的拓扑结构及其完备化[0]

刘雨喆[1,*]

1. 贵州大学数学与统计学院;

* 通讯作者, E-mail: yzliu3@163.com, liuyz@gzu.edu.cn.

摘要. 本文以拓扑Abel群的完备化为基础, 定义了拓扑k-代数及其完备化, 并从射影极限的角度对完备化的进行了代数解释.

关键词. Abel群, 归纳极限(正向极限/余极限), 射影极限(逆向极限/极限).

中图分类号. O154, O153.3.

Topological Structures and Their Completions on Algebras

Yu-Zhe Liu[1,*]

1. School of Mathematics and Statistics, Guizhou University,
Guiyang, Guizhou, 550025, P. R. China;
E-mail: yzliu3@163.com, liuyz@gzu.edu.cn;
* Corresponding Author.

Abstract. This article is based on the completion of topological Abel groups, introducts topological k-algebras and their completions, and provides an algebraic explanation of the completion by projective limits.

Key words. Representation theory of algebras, Abel group, inductive limits (colimits/direct limits), projective limits (limits/inverse limits).

Chinese Library Classification. O154, O153.3.

2010 Mathematics Subject Classification. 16G10, 16G99, 13J10, 13B35

引言

群与环的完备化在代数理论中占据了重要的地位, 它与分析、数论、几何等有着密切关联. 对任意Abel群G, 其子群降链$c: H_0 = G \supseteq H_1 \supseteq H_2 \supseteq \cdots$可以诱导$G$上的拓扑$\mathcal{J}_C$, 使得$G$也是一个拓扑空间. 进一步地, 如果群$G=(G,+)$上的加法运算$+: G\times G \to G$和求加法逆$-\mathrm{id}: G\ to G$都是在上述拓扑$\mathcal{J}_C$的意义下是连续映射, 则称$G$是*拓扑Abel群*. 由于$G$的拓扑结构, 使得它可以利用$\mathcal{J}_C$-Cauchy基本列进行完备化, 记为$\hat{G}$. 上述完备化方法也可以推广到环上, 例如交换环 [1, Chapter 5, Example 5.16] [2]), 交换Noether环 [3, 4], 局部环 [5]等. 域k上的线性空间A如果同时具有环结构, 使得环上乘法与向量空间数乘法相容, 则称A是一个*k-代数* [6–8]. 特别地, 如果k-代数是有限维向量空间, 则进一步称其是*有限维k-代数*. k-代数本身的环结构就保证了其具有Abel群的结构, 这使得群的完备化可以推广到k代数上. 如果取k是有理数域$\mathbb{Q}$, 易见$\mathbb{Q}$是其自身上的$\mathbb{Q}$-代数. 以往, 包括Dedekind等在内的诸多数学家建立了一系列的严格的代数体系将自然数集$\mathbb{N}$进行严格定义, 并利用了Dedekind-Peano分割或者对$\mathbb{Q}$完备化来获得实数集$\mathbb{R}$. 而在分析中, 获得实数集$\mathbb{R}$所广泛采用的方式则是先从$\mathbb{N}$以代数运算系统的封闭性诱导出$\mathbb{Z}$; 接着通过对$\mathbb{Z}$进行局部化而获得$\mathbb{Q}$; 最后利用了Cauchy基本列对$\mathbb{Q}$完备化得到$\mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$作为我们所熟知的最简单的代数之一, 它的完备化本质上利用了拓扑结构以及Abel群结构.

[0]国家自然科学基金项目资助(12171207).

另一方面, 任意有限维的k-代数总能Morita等价到k上的有限维基代数(basic algebra), 例如k上的下三角矩阵代数和上三角矩阵代数都与k作为自身上的k-代数时Morita等价. Gabriel证明了任意有限维基代数总能同构于某个箭图代数kQ/I, 其中I是可许理想(admissible ideal), 且箭图Q唯一 [9][1]. 这使得对有限维k-代数的研究可以归结到对某个箭图代数的研究, 同时, 利用图论方法, 箭图也为k代数提供了很好的分类.

本文将考虑将域k上的有限维代数视作Abel群时, 如何在上面诱导其拓扑结构, 并利用此拓扑结构对k代数进行完备化. 然后作为一个应用, 本文将用k-代数的完备化对我们熟知的$\wp$-adic完备化从射影极限的角度给出同调解释. 本文结构安排如下: 第1节, 本文对拓扑Abel群及其完备化的相关结论进行复习. 并且, 为了方便读者, 相关结论我们会给出简要的证明. 第4节, 本文对有限维k代数构造了拓扑结构, 并引入了拓扑k-代数的概念. 这一节我们会给出拓扑k-代数的完备化方法. 第??节将复习一些同调代数中关于归纳极限和射影极限的相关概念和结论, 并指出拓扑k-代数的完备化是一种射影极限. 在最后一节, 本文将$\mathbb{Q}$视为$\mathbb{Q}$代数, 从拓扑k-代数的完备化与射影极限的角度, 计算了一些实例.

1 拓扑Abel群的完备化

文章的这一节, 我们以$\mathbb{Q}$为核心, 回顾一般的拓扑Abel群的完备化方法.

1.1 $\mathbb{Q}$在通常拓扑意义下的完备化

文章的这一小节, 我们回顾$\mathbb{Q}$的完备化方法, 该方法以及相关内容如今在分析中被广泛使用, 例如文献 [10, 11]等. 本文总假定如下事实: 在$\mathbb{Q}$中, 通常的四则运算已经由Peano公理对$\mathbb{N}$上四则运算加法的定义所诱导, 故$(\mathbb{Q},+)$自然地被视作了Abel群; $\mathbb{Q}$上的全序关系$<$由Peano公理对$\mathbb{N}$上自然偏序的定义所诱导, 这一假设将保证对每个$x\in\mathbb{Q}$, 存在x的*r-邻域*$U(x,r)=\{\theta\in\mathbb{Q}\mid d(x,\theta)<r\}$, 这里$r\in\mathbb{Q}$, $d(x,\theta):=\max\{x-\theta,\theta-x\}$并称之为$x$与$\theta$之间的*距离*, d称为*距离函数*.

定义 1.1 对任意$\mathbb{Q}$的子集O, 我们称O*属于集合类$\mathcal{J}$*, 当且仅当O满足下述条件之一:

(1) O是空的, 即$O=\varnothing$;

(2) 或者, 对于任意$x\in O$, 存在$U(x,r)$, $r\in\mathbb{Q}$, 使得$U(x,r)\subseteq O$.

于是, 下面引理是显然的. 为了文章的完整性, 我们依然给出此引理的证明.

引理 1.2 *按定义1.1给出的集合类$\mathcal{J}$是$\mathbb{Q}$上的开集系, 换言之, $\mathbb{Q}$是拓扑空间.*

证明. 首先, 根据定义1.1, $\mathcal{J}$包含空集. 而$\mathbb{Q}\in\mathcal{J}$显然. 其次, 对任意$O_1,O_2\in\mathcal{J}$, 任取$x\in O_1\cap O_2$, 有$U(x,r_1)\subseteq O_1$以及$U(x,r_2)\subseteq O_2$, 此时令$r=\min\{r_1,r_2\}$, 则$U(x,r)\subseteq O_1\cap O_2$. 事实上, 不失一般性地, 假定$r_1\le r_2$, 则$U(x,r=r_1)\subseteq O_2$由$U(x,r_1)\subseteq U(x,r_2)$诱导. 因而根据归纳法可知$\mathcal{J}$对有限交封闭. 最后, 对于任意多个$\mathcal{J}$中的集合组$(O_i)_{i\in I}$, 记$O=\bigcup_{i\in I}O_i$, 由于对于任意$x\in O$可知$x$必定属于某一$O_i$, 从而按$\mathcal{J}$的定义可知存在$r>0$, 使得$U(x,r)\subseteq O_i\subseteq O$ 而直$O\in\mathcal{J}$. 综上得知$\mathbb{Q}$是拓扑空间. □

定义 1.3 ($\mathbb{Q}$上的开集) 我们把$\mathcal{J}$中的集合称作*开集*.

引理 1.4 ($\mathbb{Q}$上的连续映射) *映射*

$$+:\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{Q},(x,y)\mapsto x+y\text{以及}-\mathrm{id}:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q},x\mapsto -x$$

是连续映射.

[1]事实上, 无限维k-代数也可以归结到箭图代数, 但一般不能保证其箭图是唯一的.

证明. 令$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$的子集$O=O_1\times O_2$是开的, 考虑其在$+$下的像$+(O_1\times O_2)$, 任取$x\in +(O_1\times O_2)$, 则按此定义必有$x_1\in O_1, x_2\in O_2$使得$x=x_1+x_2$, 从而存在$r_1,r_2>0$使得$U(x_1,r_1)\subsetneq O_1, U(x_2,r_2)\subsetneq O_2$. 于是$U(x,r_1+r_2)\subsetneq +(U(x_1,r_1)\times U(x_2,r_2))$, 得$+(O_1\times O_2)$是开集, 进而$+$是连续映射. $-\mathrm{id}$的连续性显然. □

结合引理1.2, 1.4, 我们有如下推论

推论 1.5 *有理数集$\mathbb{Q}$按通常的拓扑结构以及四则运算加法成拓扑Abel群.*

定义 1.6 ($\mathbb{Q}$上的Cauchy基本列) 设$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是$\mathbb{Q}$上的一个数列, 我们称该数列是*Cauchy基本列*, 如果对任意$\mathbb{Q}$中的$\varepsilon>0$, 存在$N\in\mathbb{N}$ 使得$d(x_m,x_n)<\varepsilon$在$m,n>N$的情形下恒成立.

引理 1.7 (Q上的Cauchy基本列的等价性) *定义Cauchy基本列之间的二元关系$\sim$为: $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\sim\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$当且仅当对任意$\varepsilon\in\mathbb{Q}$,$\varepsilon>0$, 存在$N\in\mathbb{N}$使得$d(x_n,y_n)<\varepsilon$当$n>N$时恒成立. 则"$\sim$"是等价关系.*

证明. 首先, 对任意$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 必有$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\sim\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 这是因为$d(x_n,x_n)=0$. 其次, 按$d(x,y)=d(y,x)$自然诱导了$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\sim\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\Leftrightarrow\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\sim\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 最后, 若同时有$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\sim\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\sim\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 那么对任意正有理数$\varepsilon/2>0$, 必然存在$N',N''$, 使得当$n>\max\{N',N''\}=N$时, 恒有$d(x_n,y_n)<\varepsilon/2$以及$d(y_n,z_n)<\varepsilon/2$, 于是

$$d(x_n,z_n)=|x_n-z_n|\le|x_n-y_n|+|y_n-z_n|<\varepsilon.$$

进而$\{x_n\}\sim\{z_n\}$. 综上可知其为等价关系. □

利用等价关系, 可以对$\mathbb{Q}$上的全体Cauchy基本列进行一个划分, 使得相互等价的Cauchy基本列被分到相同的分组之下, 这样的每一个分组就被称作一个等价类. 例如序列$\{0\}_{\mathbb{N}}$, $\{1/n\}_{\mathbb{N}}$就属于同一等价类. 习惯上, 序列$\{x_n\}_{\mathbb{N}}$所在等价类记作$[\{x_n\}_{\mathbb{N}}]$, 自然地, 此处所给的例子即指出等价类之间的相等关系$[\{0\}_{\mathbb{N}}]=[\{1/n\}_{\mathbb{N}}]$. 方便起见, 记号$\mathbb{Q}^{\mathfrak{C}}$表全体$\mathbb{Q}$上Cauchy基本列构成的集合, 对此集合可以定义如下两个事实:

- 定义$\mathbb{Q}^{\mathfrak{C}}$上的加法运算和乘法运算. 具体地说, 对任意两个Cauchy基本列$\{x_n\}_{\mathbb{N}}$和$\{y_n\}_{\mathbb{N}}$, 二者的加法和乘法按下述给出:

$$\{x_n\}_{\mathbb{N}}+\{y_n\}_{\mathbb{N}}:=\{x_n+y_n\}_{\mathbb{N}};\{x_n\}_{\mathbb{N}}\cdot\{y_n\}_{\mathbb{N}}:=\{x_ny_n\}_{\mathbb{N}}.$$

  不难验证该定义是良定的.
- 定义$\mathbb{Q}$到$\mathbb{Q}^{\mathfrak{C}}$的一个嵌入:

$$\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}^{\mathfrak{C}},x\mapsto\{x_n=x\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

那么$\mathbb{Q}^{\mathfrak{C}}$是一个Abel群, 且$\hat{\mathbb{Q}}:=\mathbb{Q}^{\mathfrak{C}}/[\{0\}_{\mathbb{N}}]$就是全体Cauchy 基本列等价类构成的集合, 而对于此集合, 上述两条定义诱导出了两个事实:

- $\hat{\mathbb{Q}}$上的加法运算和乘法运算被诱导. 即, 对任意两个Cauchy基本列的等价类$[\{x_n\}_{\mathbb{N}}]$和$[\{y_n\}_{\mathbb{N}}]$, 二者的加法和乘法按下述给出:

$$[\{x_n\}_{\mathbb{N}}]+[\{y_n\}_{\mathbb{N}}]:=[\{x_n+y_n\}_{\mathbb{N}}];\ [\{x_n\}_{\mathbb{N}}][\{y_n\}_{\mathbb{N}}]:=[\{x_ny_n\}_{\mathbb{N}}].$$

  不难验证该定义是良定的.
- $\mathbb{Q}$到$\hat{\mathbb{Q}}$的一个嵌入被诱导, 即存在下述对应:

$$c:\mathbb{Q}\to\hat{\mathbb{Q}},x\mapsto[\{x_n=x\}_{n\in\mathbb{N}}].$$

  不难证明这个对应是良定的: 事实上若$x=y\in\mathbb{Q}$, 则$c(x)=[\{x_n=x=y=y_n\}_{\mathbb{N}}]=\mathrm{cpl}(y)$. 同时也容易看到$c$是一个单射.

由此, 我们得到了有理数集$\mathbb{Q}$的完备化, 即下述命题.

命题 1.8 *$\hat{\mathbb{Q}}$是完备的, 即对任意$\hat{\mathbb{Q}}$上的序列$\{[\{x_{nm}\}_{n\in\mathbb{N}}]\}_{m\in\mathbb{N}}$, 其是Cauchy基本列当且仅当其在$\hat{\mathbb{Q}}$中收敛. 这里$\hat{\mathbb{Q}}$上的Cauchy基本列随着$\hat{\mathbb{Q}}$上定义的加法而可以按下述条件自然诱导.*

- *Cauchy基本列之间的偏序"$<$": 定义$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} < \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$当且仅当对足够大的$n\in\mathbb{N}$恒有$x_n - y_n < 0$;*
- *以及, $\hat{\mathbb{Q}}$上的距离函数d: $d(\{[\{x_{nm}\}_{n\in\mathbb{N}}]\}_{m\in\mathbb{N}}, \{[\{y_{nm}\}_{n\in\mathbb{N}}]\}_{m\in\mathbb{N}}) := [\{|x_{nm}-y_{nm}|\}_{n\in\mathbb{N}}]$*

下面推论将指出命题1.8给出的$\mathbb{Q}$的完备化就是我们所熟知的实数集$\mathbb{R}$.

推论 1.9 *有Abel群的同构$\hat{\mathbb{Q}}\cong\mathbb{R}$, 且该同构也是一个环同构.*

证明. 注意对任意$x\in\mathbb{R}$, 其十进制表示为$x=\sum_{i=-\infty}^{m}10^i a_i$, 其中$a_i$是0到9中的某个自然数, 又令$x_n=\sum_{i=-n}^{m}10^i a_i$, $n\in\mathbb{N}$, 则$x_n\in\mathbb{Q}$, 从而得到了$\mathbb{Q}$上的一个序列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 定义对应关系$\mathbb{R}\to\hat{\mathbb{Q}}, x\mapsto[\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}]$, 该对应良定, 双射, 并且保加法运算, 因而是Abel群同构. 特别地, 该对应保乘法运算, 因而也是环同构. □

1.2 $\mathbb{Q}$在p-adic拓扑意义下的完备化

本节我们复习$\mathbb{Q}$的p-adic完备化, 该完备化方法可以在与拓扑以及p-adic分析相关的论著中查到, 例如 [12–15]等. 为了便于读者阅读, 我们会对相关的结论给出简要证明. 下面, 我们考虑$\mathbb{Z}$上的p-adic范数. 根据算术基本定理, 任意整数在不考虑正负符号以及乘法交换顺序的情形下, 其可以唯一地被分解为若干素数之乘积. 我们总是事先给定某个素数p, 那么对于任意整数m, 其可以被唯一地写作$p^t m'$的形式, 使得p和m互素. 函数$\nu_p:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}: m=p^t m'\mapsto= t$, $\nu_p(0)=+\infty$给出了一个对$\mathbb{Z}$的赋值, 因而诱导了一个赋值环. $|m|_{p\text{-adic}}=p^{-\nu_p(m)}=p^{-t}$定义了整数$m=p^t m'$的$p$-adic范数. 对任意有理数$r\in\mathbb{Q}$, 其总可以写成$p^t a/b$的形式, 这里$a/b$是既约分数且$p$与$ab$互素. 因此$\mathbb{Q}$按赋值函数$\nu_p(p^t a/b):=t$, $\nu_p(0)=+\infty$成赋值环, 且按$|p^t a/b|_{p\text{-adic}}=p^{-\nu_p(p^t a/b)}=p^{-t}$定义了$\mathbb{Q}$上的范数结构. 自然地, 此范数诱导了邻域的定义:

$$U_p(x=p^t a/b, r) := \{y\in\mathbb{Q} \,|\, |x-y|_{p\text{-adic}} < r\}, r\in\mathbb{Q}\text{事先给定}.$$

显然, 随着r的减小, $U_p(x,r)$中的元素也会相应地减少.

定义 1.10 对任意$\mathbb{Q}$的子集O, 我们称O*在p-adic意义下属于集合类*$\mathcal{J}$, 当且仅当O满足下述条件之一:

(1) O是空的, 即$O=\varnothing$;

(2) 或者, 对于任意$x\in O$, 存在$U_p(x,r)$, $r\in\mathbb{Q}$, 使得$U_p(x,r)\subseteq O$.

可以证明上述定义中的$\mathcal{J}$是$\mathbb{Q}$上的拓扑, 于是$\mathbb{Q}$是拓扑空间. 此类拓扑空间称作*p-adic拓扑空间*, 相对应地, 称$\mathcal{J}$是*p-adic拓扑*.

定义 1.11 (在p-adic意义下的$\mathbb{Q}$上的开集) 我们把$\mathcal{J}$中的集合称作*在p-adic意义下的开集*, 且在不引起混淆的情形下, 仍然简称*开集*.

p-adic范数不会影响通常意义下两个元素的相等, 即$x,y\in\mathbb{Q}$, 若$x=y$, 则$|x-y|_{p\text{-adic}}=|0|_{p\text{-adic}}=p^{-\infty}=0$, 同时若对于$x,y\in\mathbb{Q}$有$|x-y|_{p\text{-adic}}=0$, 则写$x=p^t a/b, y=p^s c/d$, 此时若$x\neq y$, 则有下述情形之一: $t>s>0$; $t>0>s$; $0>t>s$; $0>s>t$; $s>0>t$; $s>t>0$. 以第一个情形为例, 有$|x-y|_{p\text{-adic}}=p^{-s}=0$, 此时$s=+\infty$, 引发矛盾. 同样可以考虑剩余五种情形. 下面我们说明$\mathbb{Q}$在p-adic拓扑意义下是一个拓扑Abel群. 为说明此, 我们需要下面引理:

引理 1.12 (p-adic拓扑意义下的$\mathbb{Q}$上的连续映射) *下述映射连续.*

$$+:\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{Q},(x,y)\mapsto x+y \text{ 以及 } -\mathrm{id}:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q},x\mapsto -x$$

证明. 令$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$的子集$S_1\times S_2$是一个开子集, 则对任意$y\in +(S_1\times S_2)$, 存在$x_1\in S_1,x_2\in S_2$使得$x_1+x_2=y$, 同时也存在$U_p(x_1,r_1),U_p(x_2,r_2)$使得它们分别是$S_1,S_2$的真子集, 这里$r_1,r_2$是两个正有理数. 又, 不难看出$+(U_p(x_1,r_1)\times U_p(x_2,r_2))$也是$+(S_1\times S_2)$的真子集, 再借由下述事实可知$+(S_1\times S_2)$是开的.

$$U_p(y=x_1+x_2,\min r_1,r_2)\subseteq +(U_p(x_1,r_1)\times U_p(x_2,r_2))\subsetneq +(S_1\times S_2).$$

综述, $+$是连续映射. 而对于$-\mathrm{id}$的连续性的证明则更为容易. □

推论 1.13 *$\mathbb{Q}$按p-adic拓扑结构以及通常的四则运算加法成拓扑Abel群.*

$\mathbb{Q}$上的p-adic范数自然诱导了p-adic Cauchy基本列.

定义 1.14 ($\mathbb{Q}$上的p-adic Cauchy基本列) 有理数集$\mathbb{Q}$上的序列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$被称作是*p-adic Cauchy基本列*, 如果对任意有理数$\varepsilon>0$, 存在$N\in\mathbb{N}$使得$|x_m-x_n|_{p\text{-adic}}<\varepsilon$对任意$m,n>N$恒成立.

引理 1.15 ($\mathbb{Q}$上的p-adic Cauchy基本列的等价性) *定义p-adic Cauchy基本列之间的二元关系$\sim$为: $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\sim\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$当且仅当对任意$\varepsilon\in\mathbb{Q}$,$\varepsilon>0$, 存在$N\in\mathbb{N}$使得$|x_n-y_n|_{p\text{-adic}}<\varepsilon$当$n>N$时恒成立. 则"$\sim$"是等价关系.*

证明. 首先对任意$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$必有$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\sim\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 这是因为我们恒有$|x_n-x_n|_{p\text{-adic}}=p^{-\nu_p(0)}=p^{-\infty}=0$. 其次, 对于$x=p^ta/b,y=p^sc/d\in\mathbb{Q}$, 这里无妨假设$t-s>0$, 则若$|x-y|_{p\text{-adic}}=|y,x|_{p\text{-adic}}$, 就有

$$|p^s(p^{t-s}a/b-c/d)|_{p\text{-adic}}=p^{-s}=|p^s(c/d-p^{t-s}a/b)|_{p\text{-adic}},$$

这表明对$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\sim\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $|x_n-y_n|_{p\text{-adic}}<\varepsilon$当且仅当$|y_n-x_n|_{p\text{-adic}}<\varepsilon$, 从而$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\sim\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 而对于$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\sim\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\sim\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 应注意到如下事实

$$|x_n-z_n|_{p\text{-adic}}\le|x_n-y_n|_{p\text{-adic}}+|y_n-z_n|_{p\text{-adic}},$$

进而$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\sim\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. □

接下来, 令$[\{x_n\}_{\mathbb{N}}]_{p\text{-adic}}$表示全体$p$-adic等价于$\{x_n\}$的$p$-adic Cauchy基本列构成的等价类, 并定义$\mathbb{Q}_p:=\mathbb{Q}^{\mathfrak{C}}/[\{0\}_{\mathbb{N}}]_{p\text{-adic}}$, 如此得到了一个完备拓扑空间$\mathbb{Q}_p$, 此即为$\mathbb{Q}$的$p$-adic完备化. 严格的说, 我们有下述命题.

命题 1.16 *$\mathbb{Q}_p=\mathbb{Q}^{\mathfrak{C}}/[\{0\}_{\mathbb{N}}]_{p\text{-adic}}$是完备拓扑空间, 且对任意$x\in\mathbb{Q}_p$, 其可以唯一地写作下述展开式:*

$$x=\cdots+a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_0+\cdots+\frac{a_{-(t-1)}}{p^{t-1}}+\frac{a_{-t}}{p^t} \tag{1}$$

$$a_i\in\{0,1,\cdots,p-1\}.$$

其中展开式的右侧求和项如果是有限的, 按通常十进制计算得到x在十进制意义下的表示. 进一步地, $\nu_p(x)$取上面展开式最后一项的负幂t, $|x|_{p\text{-adic}}$ 相应地取$1/p^t$.

$\mathbb{Q}_p$具有如下性质:

命题 1.17 *对于p^n-阶循环群$\mathbb{Z}_{(p^n)}=\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$的直和 $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}^+}\mathbb{Z}_{(p^n)}=(\mathbb{Z}_{(p^n)})^{\oplus\mathbb{N}^+}$, 其中的全体$p$-adic整元素$(a_1,a_2,\cdots)$——即对任意$i$, 有$a_{i+1}\equiv a_i(\mathrm{mod}p^i)$——构成的集合记作$\mathbb{Z}_p$. 则:*

(1) $\mathbb{Z}_p$是交换幺环, 加法为$(a_i)+(b_i)=(a_i+b_i \bmod p^i)$, 乘法为$(a_i)\cdot(b_i)=(a_ib_i \bmod p^i)$;

(2) $\mathbb{Z}_p$的分式环$\text{Frac}(\mathbb{Z}_p)$是一个域;

(3) $\mathbb{Q}_p\cong \text{Frac}(\mathbb{Z}_p)$.

进而有

推论 1.18 $\mathbb{Q}_p\not\cong\mathbb{R}$.

这说明$\mathbb{Q}_p$是$\mathbb{Q}$的另一种不同于$\mathbb{R}$的完备化.

证明. 只对命题1.17作出证明.

(1). 首先$\mathbb{Z}_p$是交换环, 且含幺, 可以验证其幺元是$(1,1,\cdots)$.

(2). 事实上对任意$\mathbb{Z}_{(p^i)}$中的非零元θ, 只要$\theta\not\equiv 0(\text{mod}p)$, 则一次同余式方程$\theta x\not\equiv 1(\text{mod } p^i)$因$(\theta,p)=1$而对$x$有解, 因而$\theta$在$\mathbb{Z}_{(p^i)}$中可逆. 故对$(a_1,a_2,\cdots)\in\mathbb{Z}_p$, 只要任意$a_i$都满足$a_i\not\equiv 0(\text{mod}p)$, 则$(a_1,a_2,\cdots)$必定可逆. 另一方面, $\mathbb{Z}_p$中的不可逆元总是形如$(0,\cdots,0,a_i,a_{i+1},\cdots)$的, 这是因为若$a_i\not\equiv 0(\text{mod}p^i)$, 则由$a_{i+1}\equiv a_i(\text{mod}p^i)$, 必有$a_{i+1}\not\equiv 0(\text{mod}p^{i+1})$; 否则$a_{i+1}=up^{i+1}$. 结合$a_{i+1}\equiv a_i(\text{mod}p^i)$可知$a_{i+1}-a_i=vp^i)$, 从而$a_i=(up-v)p^i\equiv 0(\text{mod}p^i)$, 引发矛盾. 同理, 若$a_i\equiv 0(\text{mod}p^i)$, 则对$a_{i-1}$, $a_i\equiv a_{i-1}(\text{mod}p^{i-1})$必蕴含$a_j\equiv 0(\text{mod}p^j)$, 故对$i$使用归纳法可知$a_j\equiv 0(\text{mod}p^j),\forall j\le i$.

按上述, $\mathbb{Z}_p$中任意不可逆元一定形如$\mathfrak{p}^\alpha(s_1,s_2,\cdots)$, 这里$(s_1,s_2,\cdots)$可逆, $\mathfrak{p}=(0,p,p,\cdots)$; 同时也得到了$\mathbb{Z}_p$中全体可逆元所具备的通用形式, 进而决定了其全体可逆元构成的集合S. 易见S是乘性子集, 所以,

$$\text{Frac}(\mathbb{Z}_p)=S^{-1}\mathbb{Z}_p=\left\{\frac{(a_i)_{i\in\mathbb{N}^+}}{(b_i)_{i\in\mathbb{N}^+}}=\mathfrak{p}^\alpha\cdot\frac{(s_i)_{i\in\mathbb{N}^+}}{(b_i)_{i\in\mathbb{N}^+}}\,\middle|\,(s_i)_{i\in\mathbb{N}^+},(b_i)_{i\in\mathbb{N}^+}\in S\right\}.$$

由此得知, $\text{Frac}(\mathbb{Z}_p)$中的非零元必然形如$\mathfrak{p}^\alpha\cdot\mathfrak{s}/\mathfrak{b}$, 这里, $\mathfrak{s},\mathfrak{b}\in S$可逆, 所以$\text{Frac}(\mathbb{Z}_p)$是域.

(3) 根据$\mathbb{Q}_p$的定义, $\mathbb{Q}_p=\mathbb{Q}^{\mathfrak{C}}/[\{0\}_{\mathbb{N}}]_{p\text{-adic}}$为$p$-adic Cauchy基本列的等价类构成的集合, 每一个p-adic Cauchy基本列必等价于某个常数序列$\{p^\alpha s/b\}_{\mathbb{N}}$, 其中, $(p,sb)=1$, 或$s=0$(此时导致$\{p^\alpha s/b\}_{\mathbb{N}}=\{0\}_{\mathbb{N}}$). 注意$s,b\in\mathbb{Q}$可单嵌入到$\mathbb{Q}_p$, 故它们有形如(1)的$p$-adic表示, 即

$$s=\cdots+s_1p+s_2p^2+\cdots+s_0+\cdots+\frac{s_{-(l-1)}}{p^{l-1}}+\frac{s_{-l}}{p^l};\tag{2}$$

$$b=\cdots+b_1p+b_2p^2+\cdots+b_0+\cdots+\frac{b_{-(m-1)}}{p^{m-1}}+\frac{b_{-m}}{p^m}.\tag{3}$$

由此定义的映射

$$\begin{aligned}f:&\mathbb{Q}_p\to\text{Frac}(\mathbb{Z}_p)\\ &p^\alpha\frac{s}{b}\mapsto p^\alpha\frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{b}}=p^\alpha\frac{(s_{-l},s_{-(l-1)},\cdots,s_0,s_1,s_2,\cdots)}{(b_{-m},b_{-(m-1)},\cdots,b_0,b_1,b_2,\cdots)}\end{aligned}$$

给出了$\mathbb{Q}_p$到$\text{Frac}(\mathbb{Z}_p)$的同构. □

1.3 一般拓扑Abel群的完备化

同时具有拓扑空间结构和Abel群结构的集合称为*拓扑Abel群*, 其可以借由其上的拓扑结构进行完备化. 不同于$\mathbb{Q}$, 拓扑Abel群本身可以不是偏序的, 因此在定义拓扑Abel群上的Cauchy基本列时, 依赖拓扑空间中的邻域.

定义 1.19 (Cauchy基本列) 设$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是给定拓扑Abel群G上的一个序列, 我们称该序列是*Cauchy基本列*, 如果对任意0的邻域$U(0)$, 存在$N\in\mathbb{N}$使得$x_m-x_n\in U(0)$在$m,n>N$的情形下恒成立, 这里0表示拓扑Abel群的零元素.

类似前文所述, 记号$G^{\mathfrak{C}}$表示G上全体Cauchy基本列构成的集合, 并定义两个Cauchy基本列$\{x_n\}_{\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{\mathbb{N}}$之间的二元关系"$\sim$"由下述条件定义: $\{x_n\}_{\mathbb{N}} \sim \{y_n\}_{\mathbb{N}}$:$\Leftrightarrow$对任意0的邻域$U(0)$, $x_n - y_n \in U(0)$总是对足够大的n恒成立. 容易证明下面引理.

引理 1.20 *"$\sim$"是$G^{\mathfrak{C}}$上的一个等价关系.*

进一步地, 我们有下述命题.

命题 1.21 *$\hat{G} := G/[\{0\}_{\mathbb{N}}]$是一个Abel群, 且完备. 这里, $[\{0\}_{\mathbb{N}}]$表示全体等价于$\{0\}_{\mathbb{N}}$的Cauchy基本列构成的等价类.*

证明. 注意$[\{0\}_{\mathbb{N}}]$是G的正规子群, 因此$\hat{G}$是G的商群, 自然是一个Abel群. 其完备性的证明留给读者. □

命题1.21指出商群$G/[\{0\}_{\mathbb{N}}]$是拓扑Abel群G的完备化. 关于拓扑Abel群的完备化, 我们还有如下性质.

命题 1.22 *设G是拓扑Abel群, $\hat{G}$是其完备化, 则映射$\phi : G \to \hat{G}, g \mapsto [\{g\}_{\mathbb{N}}]$是一个群同态. 但是$\phi$可以不是单射.*

证明. 显然$\ker\phi = \bigcap_{U(0)\text{是0的邻域}} U(0)$. 对于$\phi$是群同态的证明是容易的, 下面给出一个$\ker\phi \neq 0$的例以说明$\phi$未必是单同态. 令$k = \mathbb{R}$, $F(k)$为所有$k \to k$的函数之集, 则其上可定义距离函数$d(f,g) := |f(0) - g(0)|$, 该距离函数d使$F(k)$成伪度量空间. 对给定的函数$f \in F(k)$, 定义$U(f,r) := \{g \in F(k) | d(f,g) < r\}$为$f$的邻域, 由此可诱导出$F(k)$的拓扑$\mathcal{J}$, 进而$F(k)$是拓扑空间, 且是拓扑Abel群. 其上的Cauchy基本列$\{f_n\}_{\mathbb{N}}$可以按下述方式定义:

- 对任意$r > 0$, 存在$N \in \mathbb{N}$使得$d(f_m, f_n) \in r$对$m, n > N$恒成立.

两个Cauchy基本列的等价$\{f_n\}_{\mathbb{N}} \sim \{g_n\}_{\mathbb{N}}$则可以由下述方式定义:

- 对任意$\varepsilon > 0$, 存在$N' \in \mathbb{N}$ 使得$d(f_n, g_n) < \varepsilon$当$n > N'$时恒成立.

从而得到$F(k)$的完备化:

$$\hat{F}(k) := \frac{(F(k))^{\mathfrak{C}}}{[0] = \{f \in F(k) | f \sim 0\}}.$$

考虑该例下的映射ϕ:

$$\phi : F(k) \to \hat{F}(k), f \mapsto (f, f, \cdots),$$

显然$f(x) = x$在此映射下有$\phi(f(x)) = (x, x, \dots) + [0] = (0, 0, \dots) + [0] = [0]$, 致使$f(x) = x \in \ker\phi$, ϕ不为单射. □

我们对命题1.22给出一条注记, 该注记不是本文所必须的, 因此我们不对此注记中的内容给出证明.

注记 1.23 设G是拓扑Abel群, $\hat{G}$是它的完备化, $\phi : G \to \hat{G}, g \mapsto [\{g\}_{\mathbb{N}}]$是单同态, 当且仅当$\hat{G}$是Hausdorff空间.

2 拓扑k-代数的完备化

文章的这一节将介绍拓扑k-代数的完备化, 它是拓扑Abel群的完备化的推广. 此外, 为了叙述的直观以及方便, 我们作出如下约定: 一个装备拓扑结构$\mathcal{J}$的拓扑空间X, 其在拓扑$\mathcal{J}$意义下诱导

的Cauchy基本列均称作$\mathcal{J}$-Cauchy基本列; X的完备化空间$\hat{X}$总记作$\mathrm{cpl}_{\mathcal{J}}(X)$以此表明此完备化是在拓扑$\mathcal{J}$意义下诱导的.

2.1 拓扑k-代数

本文中, 所指的k-代数总是假定为域k上的有限维k-代数.

定义 2.1 (拓扑k-代数) 一个有限维的拓扑k-代数 (简称拓扑k-代数) 是同时具有有限维的k-向量空间结构, 环结构和拓扑空间结构的集合, 使得向量空间上的纯量乘法和环上乘法具有相容性, 并且线性变换$\mathscr{A}_\lambda : A \to A, a \mapsto \lambda a$对任意$\lambda \in k$连续.

例 2.2 (1) 任何一个域k总是自身上的k-代数, 对0的邻域如果采用最平凡的定义: 0的邻域只有A本身, 那么自然地得到k上的一个拓扑$\mathcal{J} = \{A, \varnothing\}$, 称之为平凡拓扑. 平凡拓扑空间$k$上任意序列都是$\mathcal{J}$-Cauchy基本列, 且任意序列均在拓扑$\mathcal{J}$意义下收敛. 如此得到$k$是一个装备平凡拓扑$\mathcal{J}$的拓扑$k$-代数.

(2) 对于一般的k-代数A, 考虑其全体理想构成的集$\mathfrak{I}(A)$, 其按集合的包含关系成为一个良序集$(\mathfrak{I}(A), \preceq) = (\{I_j | j \in J\}, \preceq)$ (J是指标集), 由此诱导了一个A的理想序列$\{A_j = \bigcap_{\preceq j} I_j\}_{j\in J}$, 显然当$j_1 \preceq j_2$时, $A_{j_2} \subseteq A_{j_1}$, 故此序列为一理想降链. 另一方面, 称一个包含0的子集U是一个关于0的集, 如果对于上述的A的理想降链$\{A_j = \bigcap_{\preceq j} I_j\}_{j\in J}$, U 包含某个I_j. 下面证明这样的定义的集是0的邻域, 为此需要验证其满足拓扑空间的邻域系定义. 为方便起见, 记全体上述定义的U 构成的集合系记作$\mathfrak{U}(0)$.

(i) 若$U \in \mathfrak{U}(0)$, 则$0 \in U$: 注意关于0的集U必定包含某个A的理想A_j, 于是$0 \in A_j \subseteq U$得到$0 \in U$.

(ii) $\mathfrak{U}(0)$对有限交封闭: 取$U, V \in \mathfrak{U}(0)$, 则存在在给定理想降链中存在两个非零理想A_l, A_m使得$A_l \subseteq U$, $A_m \subseteq V$, 其中$l, m \in \mathbb{N}$. 于是$A_l \cap A_m \subseteq U \cap V$, 而$A_l \cap A_m = A_{\max\{l,m\}}$也是理想降链$\{A_j = \bigcap_{\preceq j} I_j\}_{j\in J}$中的某个理想, 其含于$U \cap V$.

(iii) 若$U \in \mathfrak{U}(0)$, $U \subseteq V \subseteq A$, 则$V \in \mathfrak{U}(0)$: 事实上, $U \in \mathfrak{U}(0)$意味着U包含A的某个理想A_j, 而$U \subseteq V \subseteq A$蕴含了$A_j \subseteq V$.

(iv) 若$U \in \mathfrak{U}(0)$, 则存在$V \in \mathfrak{U}(0)$, 使得$V \subseteq U$, 且对所有$y \in V$, 有$U - y \in \mathfrak{U}(0)$: 注意到$U \in \mathfrak{U}(0)$表明存在理想降链$\{A_j = \bigcap_{\preceq j} I_j\}_{j\in J}$中的某个理想$A_j$使得$U \supseteq A_j$, 且由于理想降链的每一理想也都属于$\mathfrak{U}(0)$, 故可取$V$为$V = A_{\succeq j} \subseteq U$, 则$V$中的任意元素$y$总满足$y \in U$, 所以$0 \in U - y$. 另一方面, $V \subseteq U - y$, 事实上对任意$y' \in V$, 注意V 是A的理想, 因此加法封闭, 从而$y' + y \in V \subseteq U$, 所以$y' \in U - y$, 即$V \subseteq U - y, \Rightarrow U - y \in \mathfrak{U}(0)$.

故综合(i), (ii), (iii)和(iv)可知$\mathfrak{U}(0)$是0的一个邻域系. 于是, 对于任意$a \in A$, 称A的子集W是a的邻域, 如果存在某个0的邻域$U \in \mathfrak{U}(0)$使得$W = U + a$. 再类似于定义1.3和1.11, 可以定义A的开子集. 精确地说, 称$O \subseteq A$是一个开集, 如果O是空集$\varnothing$, 或者O 足对任意$x \in O$, 存在x的邻域$U(x)$, 使得$U(x) \subsetneq O$. 如此诱导了k-代数A上的一个拓扑$\mathcal{J}$, 使A是拓扑空间.

下面我们说明以此得到的拓扑空间A是一个拓扑k-代数, 为此只需证明$+ : A \times A \to A$以及$-\mathrm{id}_A : A \to A$是连续映射. 后者显然, 这里只需对前者作出证明. 为此令$U_1 \times U_2$是$A \times A$中0的邻域, 即存在l, m使得$A_l \subseteq U_1$, $A_m \subseteq U_2$. 于是在加法映射$+$的作用下, $+(U_1 \times U_2) \supseteq +(A_l \times A_m)$, 式左为$U = \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\} \subseteq A$, 其包含式右的$+(A_l \times A_m) = \{a_1 + a_2 | a_1 \in A_l, a_2 \in A_m\} = A_{\max l,m} \in \{A_j = \bigcap_{\preceq j} I_j\}_{j\in J}$. 再借由任意开集总是邻域之并这一事实, 加法映射$+$将开集映射为开集, 故连续.

(3) 在(2)中对k-代数A所诱导的理想降链换成任意事先给定的理想降链$c : A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq \cdots$ (且该理想降链不要求总是严格递减的), 也可以类似地诱导出一个拓扑结构, 这通过定义0的邻域为包含某个理想降链中的理想I_j的A 之子集即可. 在(1)所给的平凡拓扑的例子中, 其对应的理想降链正是平凡降链$A = A_0 \supseteq A_1 = A \supseteq A_2 = A \supseteq \cdots$. 特别地, 如果$c$只是取$A$作为Abel群的一个子群降

链, 依然有类似的方法构造出一个A上的拓扑, 因为我们可以看到(2)的证明中不依赖于乘法封闭的性质, 仅依赖加法运算.

(4) 在(2)和(3)中, 构造拓扑k-代数的技术手法源自p-adic拓扑. 对此可以考虑环$\mathbb{Z}$的理想降链$\{p^n\mathbb{Z}\}_{n\in\mathbb{N}} = \mathbb{Z} \supseteq p\mathbb{Z} \supseteq p^2\mathbb{Z} \supseteq \cdots$, 然后定义$\mathbb{Z}$的子集$U$是一个0的邻域, 如果$U$包含某个$p^n\mathbb{Z}$. 可以类似于(2)的方式证明此定义合理, 并由此诱导出$\mathbb{Z}$的拓扑结构 [15].

2.2 拓扑k-代数的完备化

通过在拓扑k-代数上定义Cauchy基本列, 可以完成对其的完备化. 首先考虑下述引理:

引理 2.3 ($\mathcal{J}$-Cauchy 基本列的等价) *设A是一个拓扑k-代数, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是$\mathcal{J}$-Cauchy基本列. 定义二元关系 "$\sim$"为: $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \sim \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$当且仅当对任意0的邻域$U$, 总存在$n\in\mathbb{N}$使得$x_n - y_n \in U$对任意$n \geq N$成立. 则此二元关系"$\sim$"是等价关系.*

引理2.3的证明是容易的. 通过该引理, 可知对任意拓扑k-代数A, 总可以得到它的完备化

$$\mathrm{cpl}_{\mathcal{J}}(A) = \frac{A^{\mathfrak{C}}}{[\{0\}_{\mathbb{N}}] = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathfrak{C}} | \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \sim 0\}}.$$

例 2.4 (1) 考虑域k上的一元多项式环$k[x]$, 并给定一条理想降链

$$c : k[x] = I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots ,$$

则零多项式0的邻域U定义为包含某一I_j的$k[x]$的真子集, 根据例2.2的(2), 此定义合理, 且任意I_j都是0的邻域. 令$\mathcal{J}_c$为由此诱导的$k[x]$的拓扑, 则$\mathcal{J}_c$-等价于零序列$\{0\}_{\mathbb{N}}$的$\mathcal{J}_c$-Cauchy基本列$\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$满足:

$$\text{对任意给定的}I_j\text{, 存在}N(j)\in\mathbb{N}\text{, 使得当}n > N(j)\text{时, 有}P_n(x)\in I_j.$$

这意味着$\deg P_n(x) \geq j$, 换言之, P_n在k-线性基$\{1, x, x^2, \cdots\}$下的坐标表示是$(0, 0, \cdots, 0, a_j, a_{j+1}, \cdots)$. 所以在$(k[x])^{\mathfrak{C}}$中, 等价类$[\{0\}_{\mathbb{N}}]$就是以0为极限的$\mathcal{J}_c$-Cauchy基本列. 于是对于任何一个形式幂级数$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_ix^i$, 它可以由多项式序列$\{\sum_{i\leq n} a_ix^i\}_{n\in\mathbb{N}}$逼近, 且该多项式序列是$\mathcal{J}_c$-Cauchy基本列. 事实上这对任意的开集$I_j$以及任意的$m > n > j-1$, 都满足

$$\sum_{i\leq n} a_ix^i - \sum_{i\leq m} a_ix^i = -\sum_{n+1\leq m} a_ix^i \in I_{n+1} \subseteq I_{(j-1)+1} = I_j.$$

故形式幂级数环$k[[x]]$就是$k[x]$的$\mathcal{J}_c$完备化, 即

$$\mathrm{cpl}_{\mathcal{J}_{c=\{x^jk[x]\}}}(k[x]) = \frac{(k[x])^{\mathfrak{C}}}{[\{0\}_{\mathbb{N}}]} \cong k[[x]].$$

(2) 考虑域k上的二元元多项式环$A = k[x, y] \cong kQ/I$, 给定A的理想降链:

$$c : A = A_0 \supseteq A_1 = yA \supseteq A_2 = y^2A \supseteq A_3 = y^3A \supseteq \cdots ,$$

其中$\{y^nP(x, y) | P(x, y) \in k[x, y]\}$, 因而在$c$所诱导的拓扑$\mathcal{J}_c$意义下, 序列$\{Q_n(x, y)\}_{n\in\mathbb{N}}$是:

- $\mathcal{J}_c$-Cauchy基本列, 当且仅当对任意0的邻域A_j, 存在足够大的N, 使得当$m > n > N$时, $Q_m(x, y) - Q_n(x, y) \in A_j$, 即$\deg_y(Q_m(x, y) - Q_n(x, y)) \geq j$.
- $\mathcal{J}_c$-等价于$\{0\}_{\mathbb{N}}$的$\mathcal{J}_c$-Cauchy基本列, 当且仅当对任意0的邻域A_j, 存在足够大的N, 使得当$n > N$时, 有$\deg_y Q_n(x, y) \geq j$.

这里, 记号$\deg_y$表示对关于(x,y)的二元多项式求y的最高次幂. 如同(1)那样, 拓扑$\mathcal{J}_c$可以给出如下完备化:

$$\mathrm{cpl}_{\mathcal{J}_c}(k[x,y]) = \frac{(k[x,y])^{\mathfrak{C}}}{[\{0\}_{\mathbb{N}}]} \cong k[x][[y]].$$

如果再考虑$B = k[x][[y]]$及其理想降链

$$d : B = B_0 \supseteq B_1 = xB \supseteq B_2 = x^2B \supseteq B_3 = x^3B \supseteq \cdots,$$

则相同的方式有:

$$\mathrm{cpl}_{\mathcal{J}_d}(k[x][[y]]) = \frac{(k[x][[y]])^{\mathfrak{C}}}{[\{0\}_{\mathbb{N}}]} \cong k[[x,y]],$$

这就得到了二元形式幂级数环$k[[x,y]]$, 其可以由$k[x,y]$经过两次完备化得到.

(3) n元多项式环可以完备化为n元的形式幂级数环.

3 拓扑k-代数的完备化及其射影极限的描述

3.1 拓扑k-代数上的Cauchy基本列的性质

命题 3.1 *设A和B是两个拓扑k-代数, $\varphi : A \to B$是k-代数同态, 则对任意A中的Cauchy基本列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 其在B中的像$\{\varphi(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$也是Cauchy基本列.*

证明. 用0_A和0_B分别表示A和B中的零元. 对任意0_B的邻域$U(0_B)$, 定义记号

$$\varphi^{-1}(U(0_B)) = \{a \in A \mid 存在b \in U(0_B)使得\varphi(a) = b\}.$$

显然, $\varphi^{-1}(U(0_B))$是0_A的一个邻域. 令$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是A中任意给定的Cauchy基本列, 则对任意0_B的邻域$U(0_B)$, 存在正整数N, 使得$x_m - x_n \in \varphi^{-1}(U(0_B))$对任意$m, n \geq N$恒成立. 于是,

$$\varphi(x_m) - \varphi(x_n) = \varphi(x_m - x_n) \in \varphi(\varphi^{-1}(U(0_B))) = \{\varphi(x) \mid x \in \varphi^{-1}(U(0_B))\} \subseteq U(0_B).$$

可知$\{\varphi(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$也是Cauchy基本列. □

设A是拓扑k-代数, 其拓扑$\mathcal{J}_c$由理想降链$c : A = I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots$诱导. 则对此理想降链中的任意两个理想$I_j \supseteq I_i$ $(j \leq i)$, 其可诱导一个k-代数同态

$$\varphi_{ij} : A/I_i \to A/I_j, a + I_i \mapsto a + I_j, \tag{4}$$

且对每个i, A/I_i是拓扑k-代数, 其拓扑由A/I_i的理想降链$\bar{c} : A/I_i = I_0/I_i \supseteq I_1/I_i \supseteq \cdots \supseteq I_{i-1}/I_i = 0$给出, 这里, 记号$I_\imath/I_i$ $(0 \leq \imath \leq i)$ 表示$I_\imath$和I_i作为k-向量空间时按$I_i \subseteq I_\imath$诱导的商空间, 也即$I_i \subseteq I_\imath = \langle I_\imath \backslash I_i \rangle$. 换言之, A/I_i的拓扑是由$\mathcal{J}_c$自然诱导的, 因此仍可记作$\mathcal{J}_c$自然诱导, 此记法也并不会引起混淆. 于是, 根据命题3.1, A中的$\mathcal{J}_c$-Cauchy基本列$\{x_n + I_i\}_{n\in\mathbb{N}}$在自然同态 φ_{ij} 的作用下映射为A/I_j中的$\mathcal{J}_c$-Cauchy基本列$\{x_n + I_j\}_{n\in\mathbb{N}}$. 特别地, 有限维$k$-代数满足降链条件, 即存在$N \in \mathbb{N}$使得$I_i = I_N$当$i \geq N$时恒成立. 因此, $I_\infty = \lim\limits_{i\to+\infty} I_i = I_N$. 当$I_\infty = 0$时, 典范满同态$A \to A/I_j$被认为是(4)所给的代数同态$\varphi_{\infty j}$在$\infty \geq i \geq N$时的情形. 此情形下, $A/I_\infty = A/I_N = A/0 = A$.

注记 3.2 需要注意的是, 命题3.1的逆不成立. 即一个序列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的像$\{\varphi(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$如果是Cauchy基本列, 则$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$可以不是. 例如一元多项式环$k[x]$作为$k$-代数, 给定理想降链$c : k[x] \supseteq xk[x] \supseteq x^2k[x] \supseteq \cdots$, 根据例2.4可知$c$可以定义一个$k[x]$上的拓扑$\mathcal{J}_c$, 此拓扑可以诱导出$k[x]$是拓扑$k$-代数. 考虑其到商环$k[x]/x^nk[x]$的自然满同态$\varphi : k[x] \to k[x]/x^nk[x]$, 并任取一个$k[x]$上的Cauchy基本列$\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, 然后令:

$$Q_n(x) = P_n(x) + nx^{t+1}, t \in \mathbb{N}^+事先给定,$$

则得到一个$k[x]$上的序列$\{Q_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$. 此序列存在足够大的$m,n$使得$Q_m(x)-Q_n(x)=P_m(x)-P_n(x)+(m-n)x^t\notin x^Nk[x]$ (这里$N>t$以致$(m-n)x^t\notin x^Nk[x]$), 可知它不是Cauchy基本列. 但其在φ下的像$\{\varphi(Q_n(x))=P_n(x)+x^nk[x]\}_{n\in\mathbb{N}}$也等于$\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$在$\varphi$下的像, 根据命题3.1, 此像为Cauchy基本列, 如此得到一个反例.

3.2 Cauchy基本列的关联组

回顾A的$\mathcal{J}_c$-Cauchy基本列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的定义, 其对足够大的m,n应保证x_m-x_n属于某个事先随意给定的理想I_j, 进而有$x_m-x_n\in I_{\geq j}$恒成立. 如此, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$可以逼近于A的完备化空间$\mathrm{cpl}_{\mathcal{J}_c}(A)=A^{\mathfrak{C}}/[\{0\}_{\mathbb{N}}]$ 中的某个元素x. 应注意$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$在$A^{\mathfrak{C}}$中可以等价到其它更简单的Cauchy基本列上, 譬如某个常数序列$\{x\}_{\mathbb{N}}=x,x,\cdots$ (即使这需要事先知道x). 但在不能算出x的情形下, 我们可以考虑这样的$\mathcal{J}_c$-Cauchy基本列$\{\xi_n\}_{\mathbb{N}}$, 其满足

$$\xi_n=\varphi_{n+1,n}(\xi_{n+1}) \tag{5}$$

这一考虑是基于如下事实: 我们假定原本的$\mathcal{J}_c$-Cauchy基本列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$已经知道了足够多的项$x_1,x_2,\cdots,x_n$, 这一假设是符合实际的, 此时考虑x_n在$\varphi_n:A\to A/I_n$下的像x_n+I_n, 记作ξ_n. 则同态$\varphi_{n,n-1}$作用到ξ_n上得$\varphi_{n,n-1}(x_N)\in I_{n-1}$, 记作$\xi_{n-1}$; 然后再利用同态$\varphi_{n-1,n-2}$作用到$\xi_{n-1}$上得$\xi_{n-2}$; 以此类推, 直到$\xi_0$. 如此获得了一个$\prod_{i=0}^{n}A/I_i$中的$n$-元组$(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n)$. 最为理想的情形是我们可以在$\prod_{i\in\mathbb{N}}A/I_i$中找到这样了组$(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots)=(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, 其对所有的$n$都有(5)成立, 同时其在$\mathrm{cpl}_{\mathcal{J}_c}(A)$对应于$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 如此, 我们已经获得了如下引理:

引理 3.3 *令A是拓扑k-代数, 其上的拓扑$\mathcal{J}_c$由A的理想降链c诱导. 则对任意$\mathcal{J}_c$-Cauchy基本列$\{x_n\}_{\mathbb{N}}\in A^{\mathfrak{C}}$, 存在$(\xi_n)_{\mathbb{N}}\in\prod_{i\in\mathbb{N}}A/I_i$使得其满足:*

(1) *式(5), 即$\xi_n=\varphi_{n+1,n}(\xi_{n+1})$;*
(2) *$(\xi_n)_{\mathbb{N}}$对应到A的完备化$\mathrm{cpl}_{\mathcal{J}_c}(A)$中的$\mathcal{J}_c$-Cauchy基本列$\{x_n\}_{\mathbb{N}}$.*

定义 3.4 (Cauchy基本列的关联组) 引理3.3中的序列$\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$被称作是$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的关联组 (coherent sequence).

下面命题描述了全体关联组构成的集所具备的代数结构.

命题 3.5 (Cauchy基本列的关联组) *令A是拓扑k-代数, 其上的拓扑$\mathcal{J}_c$由A的理想降链c诱导, 则:*

(1) *全体$\mathcal{J}_c$-Cauchy基本列的关联组构成的集合$\mathrm{coh}(A^{\mathfrak{C}})$是拓扑Abel群;*
(2) *$\mathrm{coh}(A^{\mathfrak{C}})$是一个$k$-代数. 且$\mathrm{coh}(A^{\mathfrak{C}})\cong\mathrm{cpl}_{\mathcal{J}_c}(A)$.*

证明. (1) 记$c:A=I_0\supseteq I_1\supseteq I_2\supseteq\cdots$, 由于$\varphi_{n+1,n}:A/I_{n+1}\to A/I_n$是$k$-代数同态, 故亦为群同态, 因此对任意$(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}},(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathrm{coh}(A^{\mathfrak{C}})$, 式(5)蕴含了

$$(\xi_n+\eta_n)=\varphi_{n+1,n}(\xi_{n+1})+\varphi_{n+1,n}(\eta_{n+1})=\varphi_{n+1,n}(\xi_{n+1}+\eta_{n+1}),$$

所以$\mathrm{coh}(A^{\mathfrak{C}})$是Abel群. 注意到$\mathrm{coh}(A^{\mathfrak{C}})$作为$\prod_{i\in\mathbb{N}}A/I_i$的子集可知其上的拓扑可由$\mathcal{J}_c$诱导, 故仍以$\mathcal{J}_c$表示, 此外, $\mathrm{coh}(A^{\mathfrak{C}})$上的加法$+$可以自然地按下式定义:

$$\boldsymbol{+}:\mathrm{coh}(A^{\mathfrak{C}})\times\mathrm{coh}(A^{\mathfrak{C}})\to\mathrm{coh}(A^{\mathfrak{C}}),\{\xi_n\}_{\mathbb{N}}\boldsymbol{+}\{\eta_n\}_{\mathbb{N}}\mapsto\{\xi_n+\eta_n\}_{\mathbb{N}},$$

上式中$\xi_n+\eta_n$的加法$+$沿用代数A上的加法. A是拓扑k-代数可知$+$是连续的, 即对每一分量n, $+:(\xi_n,\eta_n)\mapsto\xi_n+\eta_n$连续, 因此$\boldsymbol{+}$连续. 同理对于$-\mathrm{id}_{\mathrm{coh}(A^{\mathfrak{C}})}$的连续性也由$-\mathrm{id}_A$的连续性可自然地得到. 所以$-\mathrm{id}_{\mathrm{coh}(A^{\mathfrak{C}})}$是拓扑Abel群.

$\mathrm{coh}(A^{\mathfrak{C}})$也是一个$k$-代数，首先它是$k$-向量空间，且是环. 其次，对任意$\lambda \in k, (\xi_n)_{\mathbb{N}}, (\eta_n)_{\mathbb{N}}, (\xi_n)_{\mathbb{N}}(\eta_n)_{\mathbb{N}} = (\xi_n\eta_n)_{\mathbb{N}}$, 其具备向量空间数乘法与环上乘法的相容性

$$\begin{aligned}&\lambda(\xi_n)_{\mathbb{N}}(\eta_n)_{\mathbb{N}} = (\lambda)_{\mathbb{N}}(\xi_n)_{\mathbb{N}}(\eta_n)_{\mathbb{N}} = (\lambda\xi_n\eta_n)_{\mathbb{N}}\\ =&((\lambda\xi_n)\eta_n)_{\mathbb{N}} = (\lambda(\xi)_{\mathbb{N}})(\eta)_{\mathbb{N}}\\ =&(\xi_n(\lambda\eta_n))_{\mathbb{N}} = (\xi)_{\mathbb{N}}(\lambda(\eta)_{\mathbb{N}})\end{aligned}$$

最后，k-向量空间上的数乘法$k \times \mathrm{coh}(A^{\mathfrak{C}}) \to \mathrm{coh}(A^{\mathfrak{C}}), (\lambda, (\xi_n)_{\mathbb{N}}) \mapsto \lambda(\xi_n)_{\mathbb{N}}$ 的连续性由A的k-向量空间上的数乘法的连续性自然诱导，综上，$\mathrm{coh}(A^{\mathfrak{C}})$是拓扑$k$-代数.

(2) 考虑下述对应

$$\psi : \mathrm{coh}(A^{\mathfrak{C}}) \to \mathrm{clp}_{\mathcal{J}_c}(A), (\xi_n)_{\mathbb{N}} \mapsto [\{x_n\}_{\mathbb{N}}],$$

其中x_n是$\xi_n \in A/I_n$在$\varphi_n : A \to A/I_n$下的原像.

关于ψ, 有如下两点:

(i) $\{x_n\}_{\mathbb{N}}$必定是A上的Cauchy基本列. 事实上对任意$m > n$, 有:

$$\varphi_n(x_m - x_n) = (x_m - x_n) + I_n = (x_m + I_n) - \xi_n,$$

这里由$I_n \supseteq I_m$可知$x_m + I_n = \varphi_{mn}(x_m + I_m) = \varphi_{mn}(\xi_m)$, 所以

$$\varphi_n(x_m - x_n) = \varphi_{mn}(\xi_m) - \xi_n \overset{(5)}{=\!=\!=} \xi_n - \xi_n = 0_{A/I_n}, \text{即} x_m - x_n \in I_n;$$

因此对任意I_N, 当$m > n > N$时, $x_m - x_n \in I_n \subseteq I_N$.

(ii) 对不同的原像x_n, x_n', 有$\varphi_n(x_n - x_n') = \xi_n - \xi_n = 0_{A/I_n}$, 故$x_n - x_n' \in \ker\varphi_n = I_n$. 因此，当$N$足够大时，$x_{\geq N} - x'_{\geq N} \in I_{\geq N}$蕴含了$\{x_n\}_{\mathbb{N}} \sim \{x_n'\}_{\mathbb{N}}$.

综合(i)和(ii), ψ良定.

下面证明ψ是双射. 首先ψ是满射显然. 而对于任意$A^{\mathfrak{C}}$中等价于$\{0\}_{\mathbb{N}}$的$\mathcal{J}_c$-Cauchy基本列$\{x_n\}_{\mathbb{N}}$, 由于对任意A的理想I_m, 存在$N \in \mathbb{N}$使之有$x_{\geq N} \in I_m$, 故在A/I_m中有$x_{\geq N} + I_m = 0_{A/I_m}$, 于是,$\varphi_{m,m-1}(x_{\geq N} + I_m) = \varphi_{m,m-1}(0_{A/I_m}) = 0_{A/I_{m-1}}$, 从而$\mathcal{J}_c$-Cauchy基本列$\{x_n\}_{\mathbb{N}}$在$\mathrm{coh}(A^{\mathfrak{C}})$中的原像$(\xi_n)_{\mathbb{N}}$必满足$\xi_{\leq m} = 0_{A/I_{\leq m}}$. 再根据$m$的任意性，可知$\{x_n\}_{\mathbb{N}}$的原像必为$(0)_{\mathbb{N}} = 0_{\mathrm{coh}(A^{\mathfrak{C}})}$, 即$\ker\psi \cong 0$. 所以$\psi$是单射，它还给出了拓扑$k$-代数之间的同构$\mathrm{coh}(A^{\mathfrak{C}}) \cong \mathrm{clp}_{\mathcal{J}_c}(A)$. □

3.3 拓扑k-代数的完备化是射影极限

这一部分将指出$\mathrm{coh}(A^{\mathfrak{C}})$的射影极限表述. 为此，我们先引入代数理论中对与极限的定义.

定义 3.6 (极限) [1, Chapter 5] 令$\mathfrak{X}$是一个Abel群系，若其:

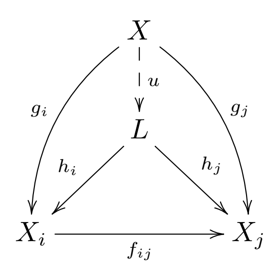
- 可以视作一个良序索引$I = (I, \preceq)$上的Abel群系$\mathscr{X} = \{X_i | i \in I\}$以使之有一组Abel群同态系$\mathscr{H} = \{f_{ij} : X_i \to X_j | j \preceq i\}$, 这里$i, j \in I$且$f_{ii} = \mathrm{id}_{X_i}$;
- 且对于任意$X \in \mathscr{X}$, 所有的由X到X_i的群同态$g_i \in \mathscr{H}$能够满足$f_{ij}g_i = g_j$.

则称$\mathscr{X}$中的Abel群L是X_i的射影极限(或逆向极限，又或极限), 如果其满足:

(1) L到任意X_i都有群同态$h_i : L \to X_i$属于$\mathscr{H}$;

(2) 任意$h_i : L \to X_i$都使得$f_{ij}h_i = h_j$;

(3) 在$\mathscr{H}$中唯一存在Abel群同构$u: X \to L$, 使得$h_i u = g_i, h_j u = g_j$.



习惯上, 我们记X_i的射影极限L为

$$L = \varprojlim X_i.$$

对偶地可以定义归纳极限 (也称作正向极限或者余极限).

注记 3.7 (极限唯一定理 [1, Chapter 5, page 231 and 238]) 射影极限/归纳极限如果存在, 则其必定在同构意义下唯一.

定理 3.8 *令k-代数A按理想降链$c: A = I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots$所诱导的拓扑$\mathscr{J}_c$成拓扑$k$-代数, 则对于$\mathscr{X} = \{X_i | i \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathrm{coh}(A^{\mathfrak{C}})\}$上的群同态系$\mathscr{H} = \{\varphi_{ij} : A/I_i \to A/I_j | i,j \in \mathbb{N}, 且 j \leq i\} \cup \{u_h : A/I_h \to \mathrm{coh}(A^{\mathfrak{C}}) | h \in \mathbb{N}\}$, 有*

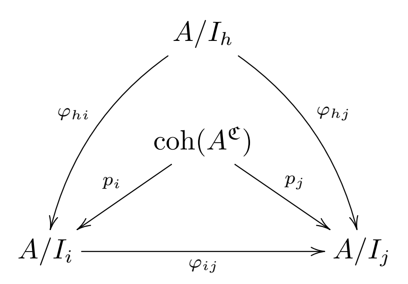
$$\mathrm{coh}(A^{\mathfrak{C}}) = \varprojlim_{i \in \mathbb{N}} A/I_i.$$

这里φ_{ij}依式(5)给出, u_h依$x + I_h \mapsto (0, \cdots, \underset{i-1}{0}, x, \underset{i+1}{0}, 0, \cdots)$给出.

证明. 根据命题3.5, 任何一个$\prod_{i \in \mathbb{N}} A/I_i$中满足式(5)的$\mathbb{N}$-元组$(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots)$必是某一$A^{\mathfrak{C}}$中的关联组, 这里$\varphi_{n,n-1}$的定义由式(4)给出, 因此$\mathrm{coh}(A^{\mathfrak{C}})$可以被解释为:

$$\mathrm{coh}(A^{\mathfrak{C}}) = \left\{ (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} A/I_i \,\middle|\, \xi_{n-1} = \varphi_{n,n-1}(\xi_n) \right\}.$$

我们考虑这样的拓扑Abel群系$\tilde{\mathscr{X}} = \{A/I_i | i \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{N} = (\mathbb{N}, \leq)$是它的一个良序的索引集, 易见, 对任意索引集中的$j \leq i$, φ_{ij}提供了群同态$A/I_i \to A/I_j$. 而对于任意A/I_i, $\mathrm{coh}(A^{\mathfrak{C}})$可以经由映射$p_i : (\xi_0, \cdots, \xi_{i-1}, \xi_i, \xi_{i+1}, \cdots) \mapsto \xi_i$将其中任何Cauchy基本列的关联组射影到$A/I_i$ (习惯上, p_i也被称作射影), 因而式(5)自然地给出了$\varphi_{ij} p_i = p_j$. 而对于$\tilde{\mathscr{X}}$中的任何一个其它的A/I_h, $j \leq i \leq h$保证了$A/I_h \to A/I_j$和$A/I_h \to A/I_i$的存在, 即φ_{hj}, φ_{hi}, 同时还保证了下图交换.

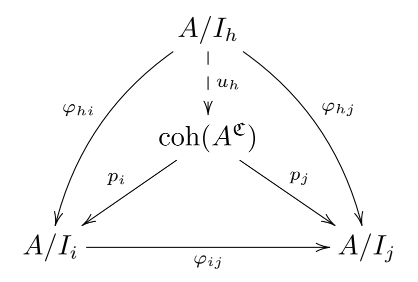


所以, 如果$u_h : A/I_h \to \mathrm{coh}(A^{\mathfrak{C}})$是一个Abel群同态, 其使得$p_i u = \varphi_{hi}$, $p_j u = \varphi_{hj}$ 则对任意$\theta + I_h \in A/I_h$, $(\theta \in A)$, 有

$$p_i u(\theta + I_h) = \varphi_{hi}(\theta + I_h) = \theta + I_i; \; p_j u(\theta + I_h) = \varphi_{hj}(\theta + I_h) = \theta + I_j.$$

令$\mathscr{X} := \tilde{\mathscr{X}} \cup \{\mathrm{coh}(A^{\mathfrak{C}})\}$, 其看作定义在良序的索引$\mathbb{N}^{\mathrm{adinfty}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$上, 这里记号$\infty$是该良序索引$\mathbb{N}^{\mathrm{adinfty}}$中的极大元, 即对任意$i \in \mathbb{N}^{\mathrm{adinfty}}$, 有$i \leq \infty$. 如同每一个$i$索引了$A/I_i$那样, ∞索引$\mathrm{coh}(A^{\mathfrak{C}})$.

相应于$\mathscr{X}$的群同态系$\mathscr{H}$则定义为$\mathscr{H} := \{\varphi_{ij}|i,j\in\mathbb{N}, j\le i\}\cup\{u_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{p_i|i\in\mathbb{N}\}$. 在这个索引下, 对任意$h$, 唯一存在$u_h$能使下图交换



因此, $\mathrm{coh}(A^{\mathfrak{C}}) = \varprojlim_{i\in\mathbb{N}} A/I_i$. □

由上面的证明, 立刻有下述推论.

推论 3.9 *沿用定理3.8的记号, 拓扑k-代数A的完备化$\mathrm{cpl}_{\mathcal{J}_c}(A)$在同构意义下是射影极限$\varprojlim A/I_i$, 即存在$k$-代数同构*

$$\mathrm{cpl}_{\mathcal{J}_c}(A) \cong \varprojlim A/I_i.$$

4 拓扑k-代数完备化观点下的$\mathbb{Q}$的$\wp$-adic完备化

取$\wp$为$\mathbb{Z}$的素理想, 则其必为某一素数(仍然记作$\wp$)生成的$\mathbb{Z}$的主理想, 对应地理想降链可写作:

$$c_\wp : \mathbb{Z} \supseteq \langle\wp\rangle \supseteq \langle\wp^2\rangle \supseteq \cdots,$$

$\mathbb{Z}$的$\wp$-adic完备化为:

$$\mathrm{cpl}_\wp(\mathbb{Z}) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}^+} \mathbb{Z}_{(\wp^n)},$$

其常被记作$\mathbb{Z}_\wp$. 为了更清晰地看到$\mathbb{Z}_\wp$中的元素的形式, 我们需要考虑$\mathbb{Z}^{\mathfrak{C}}$, 为此, 需要考虑$\mathcal{J}_\wp$-Cauchy基本列.

引理 4.1 *令$\wp$是$\mathbb{Z}$的素理想, 则$\mathbb{Z}$的$\wp$-adic完备化$\mathbb{Z}_\wp$上的序列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$是$\mathcal{J}_\wp$-Cauchy基本列当且仅当对足够大的$N\in\mathbb{N}$总是有$x_{\ge N}$形如$x_{\ge N} = x + \theta_{\ge N}\wp^{\ge N}$, 其中$x$为恒定值.*

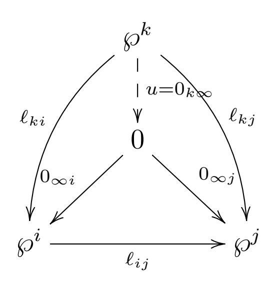
证明. 理想$\langle\wp^n\rangle$可以通过一次同余式被描述为

$$\langle\wp^n\rangle = \{m\in\mathbb{Z} \mid m \equiv 0(\mathrm{mod}\,\wp^n)\},$$

因此, $\mathbb{Z}$上等价于0的$\mathcal{J}_\wp$-Cauchy基本列$\{x_n\}_\mathbb{N}$等价于$x_{\ge N}\in\langle\wp^n\rangle$ (即$x_{\ge N}\equiv 0(\mathrm{mod}\,\wp^n)$) 对足够大的$N$恒成立的序列. 换言之, 至第$N$项开始, 序列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的元素均可写为$\theta_j\wp^j$的形式, $j\ge N$. 对于此也可以用射影极限$\varprojlim_{(n\to+\infty)} \wp^n = 0$解释, 见下文所给注记4.2. 而对于任意$\mathcal{J}_\wp$-Cauchy基本列, 利用$\mathbb{Z}^{\mathfrak{C}}$上的Abel群结构易知引理也成立. □

注记 4.2 对于素数$\wp$, 考虑定义在索引$\mathbb{N}$上的集合$\mathscr{X} := \{0, \wp^0 = \mathbb{Z}, \wp, \wp^2, \cdots, \}$, 其每一元素可以对应为一$\mathbb{Z}$的理想, 且对任意$i\ge j$, 可以定义态射$\ell_{ij} : \wp^i \to \wp^j$ (不妨称为指向关系). 特别地, 对$i=j$的情形, 此指向关系取等号$\wp^i = \wp^j$. 则$\mathscr{X}$依指向关系集$\mathscr{H} := \{\ell_{ij}|i,j\in\mathbb{N}\}\cup\{0_{i\infty} : \wp^i \to 0|i\in$

$\mathbb{N}\} \cup \{0_{\infty i}: 0 \to \wp^i | i \in \mathbb{N}\}$成逆系, 同时对任意$i \geq j \geq k$, 有交换图



这便得到了关于素数$\wp$的一个射影极限$\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \wp^n = 0$. 该射影极限指出了理想$\langle\wp^n\rangle$在$n \to +\infty$情形下逼近0, 进而开邻域系$\{\langle\wp^n\rangle\}$以零理想0为极限.

回顾命题3.5, 若已知$\mathcal{J}_\wp$-Cauchy基本列$\{x_n\}_\mathbb{N}$的第N项, 且其从第N项开始, 总有$x_{\geq N} = x + \theta_{\geq N}\wp^{\geq N}$, 则其关联组$(\xi_n)_\mathbb{N}$可按下式诱导:

$$\xi_N := x_N + \langle\wp^N\rangle = x + \langle\wp^N\rangle;\ \xi_{n-1} := \varphi_{n,n-1}(\xi_n) = \xi_n + \langle\wp^{n-1}\rangle, \forall n = 1, \cdots, N.$$

具体地说, 如果我们书写时省略陪集$\langle\wp^n\rangle$, 则ξ_N可按同余式$\xi_N \equiv x_N (\mathrm{mod}\,\wp^N)$给出, $(0 \leq \xi_N \leq \wp^N)$; 然后用$\xi_N$依$\xi_{N-1} \equiv \xi_N (\mathrm{mod}\,\wp^{N-1})$推算$\xi_{N-1}$; 以此类推, 直到获得$\xi_1$. 而对于$\geq N$的情形, 在省略陪集的书写下, 有$\xi_{\geq N} = x$. 这就得到了$\{x_n\}_\mathbb{N} = (\cdots, x_{N-1}, x + \theta^N\wp^N, x + \theta^{N+1}\wp^{N+1})$的关联组为

$$(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\cdots, x + \langle\wp^{N-1}\rangle, x + \langle\wp^N\rangle, x + \langle\wp^{N+1}\rangle, \cdots\right) \in \mathrm{coh}(\mathbb{Z}^\mathfrak{C}) \subseteq \prod_{n\in\mathbb{N}^+} \mathbb{Z}_{\wp^n}.$$

根据命题3.5的(2), $\mathrm{coh}(\mathbb{Z}^\mathfrak{C})$给出了$\mathbb{Z}$的$\wp$-adic完备化:

$$\mathbb{Z}_\wp = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}^+} \mathbb{Z}_{(\wp^n)} = \frac{\mathbb{Z}^\mathfrak{C}}{[0]} \cong \mathrm{coh}(\mathbb{Z}^\mathfrak{C}) \tag{6}$$

并且下面映射提供了一个$\mathbb{Z}$到$\mathbb{Z}_\wp$的单嵌入.

$$\mathbb{Z} \to \mathrm{coh}(\mathbb{Z}^\mathfrak{C}), m \mapsto \left(m + \langle\wp\rangle, m + \langle\wp^2\rangle, \cdots\right). \tag{7}$$

此嵌入下, 对任意的$m \in \mathbb{Z}$, 同构(6)将其映射到$\wp$-adic完备化$\mathbb{Z}_\wp$的像就是$\mathbb{Z}_\wp$中的平凡$\wp$-进整数 (该事实也可以被作为平凡$\wp$-进整数的代数定义). 注意, 在同构意义下$\mathbb{Z}$可以单嵌入到$\mathbb{Z}_\wp$, 故平凡$\wp$-进整数$(m + \langle\wp\rangle, m + \langle\wp^2\rangle, \cdots)$当$0 \leq m < \wp$时仍会沿用$\mathbb{Z}$中的写法$m$, 而$m = \wp$的情形则是对应了$m = 0 + 1\wp + 0\wp^2 + \cdots$, 并被写作$10_\wp$.

下面引理表明单同态(7)不是满的, 因此, $\wp$-adic完备化$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\wp$不是一个平凡的完备化, 当然, 这也是一个众所周知的事实, 但为了便于读者, 我们依然给出下面引理的证明.

引理 4.3 *对素数$\wp \in \mathbb{Z}$, 环$\mathbb{Z}$的$\wp$-adic完备化$\mathbb{Z}_\wp$存在不为平凡$\wp$-进整数的元素, 换言之, 在同构意义下, 有$\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}_\wp$.*

证明. 利用同构(6), 在$\mathrm{coh}(\mathbb{Z}^\mathfrak{C})$中考虑$(\xi_n)_\mathbb{N}$, 这里,

$$\xi_n = x + \wp + \cdots + \wp^{n-1} + \langle\wp^n\rangle.$$

显然, $\varphi_{n,n-1} : \mathbb{Z}_{\wp^n} \to \mathbb{Z}_{\wp^{n-1}}$的作用下, $\varphi_{n,n-1}(\xi_n) = x + \wp + \cdots + \wp^{n-2} + \langle\wp^{n-1}\rangle = \xi_{n-1}$, 但此$(\xi_n)_\mathbb{N}$无法看作是由$\mathbb{Z}$中的元素单嵌入到$\mathbb{Z}_\wp$的. □

定义 4.4 (第一型$\wp$-进整数) 对给定素数$\wp$, $\mathbb{Z}$的$\wp$-adic完备化中的元素称作第一型$\wp$-进整数.

例 4.5 作为一个例子, 考虑由素数5所决定的$\mathbb{Z}$的5-adic完备化$\mathbb{Z}_5$.

(1) 根据3.5的(2), 此完备化由理想降链$c:\mathbb{Z}=\langle 5^0\rangle\supsetneq\langle 5^1\rangle\supsetneq\langle 5^2\rangle\supsetneq\cdots$按$\mathbb{Z}_5=\varprojlim_{n\to+\infty}\mathbb{Z}/\langle 5^n\rangle\cong\mathrm{coh}(\mathbb{Z}^{\mathfrak{c}})$得到. 在同构意义下, $\mathbb{Z}_5$中的元素总是形如

$$(x+\langle 5\rangle, x+\theta_1 5+\langle 5^2\rangle, x+\theta_1 5+\theta_2 5^2+\langle 5^3\rangle,\cdots)\in\mathrm{coh}(\mathbb{Z}^{\mathfrak{c}})\subseteq\prod_{n\in\mathbb{N}^+}\mathbb{Z}/\langle 5^n\rangle,$$

式中的每一个θ_i取满足$0\le\theta_i<5$的整数. 习惯上, 上式所表示的5-进整数常写作$\cdots\theta_2\theta_1\bar{x}_5$. 而平凡5-进整数则是对应$\theta_i=0\ (\forall i)$的情形, 此时沿用上述记号, 平凡5-进整数将写作$\cdots 00\bar{x}_5$, 并且仍沿用$\mathbb{Z}$的习惯其简写为$\bar{x}_5$. 以上, $0\le\bar{x}<5$满足$x\equiv\bar{x}(\mathrm{mod}5)$. 更为具体的例子如$8=13_5$, $5^3=1000_5$等. 特别地, 二者的5-adic范数均为1. 事实上, 它们均不能被5整除, 因此在$\mathbb{Z}$中是形如5^0m型整数. 从而$|5^0m|_{5\text{-adic}}=1/5^0=1$.

(2) 我们已经考虑过$\mathbb{Q}$的$\wp$-adic完备化$\mathbb{Q}_\wp$是按Abel子群降链$\langle\wp\rangle\supseteq\langle\wp^2\rangle\supseteq\cdots$所决定的射影极限$\varprojlim\mathbb{Q}/\langle\wp^n\rangle$, 这里的商$\mathbb{Q}/\langle\wp^n\rangle$自然也只是作为Abel群的商而非环的商, 详细见例2.2的(3). 命题1.17也已经指出了$\mathbb{Z}_\wp$的分式化$\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}_\wp)$是$\mathbb{Q}_\wp$. 继续本例对(1)的讨论, 对$\wp=5$的情形, $\mathrm{cpl}_{\mathcal{J}}(\mathbb{Q})\cong\varprojlim\mathbb{Q}/\langle 5^n\rangle\cong\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}_5)\cong\mathrm{coh}(\mathbb{Q}^{\mathfrak{c}})$, 上述同构中, $\mathrm{coh}(\mathbb{Q}^{\mathfrak{c}})$是最为直观的, 它的元素都是由$\mathcal{J}_c$-Cauchy基本列诱导的关联组, 这里$\mathcal{J}_c$是降链$c$(作为$\mathbb{Q}$的Abel子群降链)所诱导的$\mathbb{Q}$的拓扑. 以$\frac{3}{4}$为例, 我们想要写出它的5-进数表示, 首先考虑与它等价的$\mathcal{J}_c$-Cauchy基本列$\{x_n=\frac{3}{4}\}_{\mathbb{N}}=(\frac{3}{4},\frac{3}{4},\cdots)$, 并计算它对应在$\mathrm{coh}(\mathbb{Q}^{\mathfrak{c}})$中的关联组. 注意$\mathrm{coh}(\mathbb{Q}^{\mathfrak{c}})$是$\prod_{\mathbb{N}^+}\mathbb{Q}/\langle 5^n\rangle$的子集, 因此Cauchy基本列只需要从第1项开始考虑.

$$\begin{aligned}
x_1&=\frac{3}{4} &&\rightsquigarrow\quad \frac{3+\langle 5\rangle}{4}=\frac{8+\langle 5\rangle}{4}=2+\frac{\langle 5\rangle}{4} &&\rightsquigarrow\quad \xi_1=2;\\
x_2&=\frac{3}{4} &&\rightsquigarrow\quad \frac{3+\langle 5^2\rangle}{4}=\frac{28+\langle 5^2\rangle}{4}=7+\frac{\langle 5^2\rangle}{4}=2+1\cdot 5+\frac{\langle 5^2\rangle}{4} &&\rightsquigarrow\quad \xi_2=1;\\
x_3&=\frac{3}{4} &&\rightsquigarrow\quad \frac{3+\langle 5^3\rangle}{4}=\frac{128+\langle 5^2\rangle}{4}=32+\frac{\langle 5^2\rangle}{4}=2+1\cdot 5+1\cdot 5^2+\frac{\langle 5^2\rangle}{4} &&\rightsquigarrow\quad \xi_3=1;\\
&\cdots
\end{aligned}$$

进而得到$\frac{3}{4}$在$\mathbb{Q}_5$上的展开式:

$$\frac{3}{4}=2+1\cdot 5+1\cdot 5^2+1\cdot 5^3+\cdots=\cdots 112_5=\dot{1}2_5,$$

此即$\frac{3}{4}$的5-进数表示.

(3) 仍然沿用(1)和(2)的记号, 我们计算$\frac{3}{5^2\cdot 4}=\frac{3}{100}$的5-进数表示. 原则上, 我们已经知道了$\frac{3}{4}$的5-进数表示:

$$\frac{3}{4}=\cdots 11112_5,$$

因此

$$\frac{3}{100}=\frac{\cdots 11112_5}{5^2}=111.12_5=\dot{1}.12_5,$$

$\frac{3}{100}$与$\frac{3}{4}$的不同之处在于前者有小数点, 而后者没有.

从例4.5可以看到, $\frac{3}{4}$在$\mathbb{Q}_5$中的5-进数表示没有小数点, 但是它本身又并非由$\mathbb{Z}$的5-adic 完备化嵌入, 这样的数称作第二型5-进整数. 更一般地, 我们有如下定义:

定义 4.6 ($\wp$-进整数) 对给定素数$\wp$, $\mathbb{Q}_\wp$中的元素x称作$\wp$-进整数, 如果其$\wp$-adic展式若形如

$$x=\sum_{i=0}^{+\infty}a_i\wp^i,\ a_i\in\{0,1,\cdots,\wp\}.$$

其中, $\wp$-进整数中除第一型$\wp$-进整数以外的数称作第二型$\wp$-进整数.

命题 4.7 设$\wp$是素数，$\mathbb{Q}_\wp$是$\mathbb{Q}$的$\wp$-*adic*完备化. 则$x \in \mathbb{Q}$的$\wp$-进数表示是一个$\wp$-进整数当且仅当其$\wp$-*adic*范数小于1.

证明. x是$\wp$-进整数当且仅当其$\wp$-adic展式形如$x = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i \wp^i$，因此存在$n > 0$使得$a_{\leq n-1} = 0$，同时$a_n \neq 0$. 于是，$|x|_{\wp\text{-adic}} = p^{-n} \in (0,1)$. □

References

[1] ROTMAN, J., J. *An Introduction to Homological Algebra (second edition)* [M]. Springer, 1979.

[2] STACKS PROJECT AUTHOURS The Stacks Project/Part 1: Preliminaries/Chapter 10: Commutative Algebra/Section 10.96: Completion [OL]. [2023-4-16]. https://stacks.math.columbia.edu/tag/00M9.

[3] ATIYAH, M., F., MACDONALD, I., G. *Introduction to commutative algebra* [M]. CRC Press, 2018.

[4] STACKS PROJECT AUTHOURS The Stacks Project/Part 1: Preliminaries/Chapter 10: Commutative Algebra/Section 10.97: Completion for Noetherian rings [OL]. [2023-4-16]. https://stacks.math.columbia.edu/tag/0BNH.

[5] STACKS PROJECT AUTHOURS The Stacks Project/Part 1: Preliminaries/Chapter 10: Commutative Algebra/Section 10.160: The Cohen structure theorem [OL]. [2023-4-16]. https://stacks.math.columbia.edu/tag/0323.

[6] AUSLANDER, M. Representation theory of Artin algebras II [J]. *Communications in algebra*, 1(4):269–310, 1974.

[7] AUSLANDER, M., RIETEN, I., SMALØ, S., O. *Representation theory of Artin algebras* [M]. Cambridge University Press, 1995.

[8] ASSEM, I., SIMSON D., SKOWROŃSKI, A. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Volume 1 Techniques of Representation Theory* [M]. Cambridge University Press, 2006.

[9] GABRIEL, P. Unzerlegbare Darstellungen I [J]. *Manuscripta Mathematica*, 6(1):71–103, 1972.

[10] LANG, S. *Real and functional analysis* [M]. Springer Science & Business Media, 2012.

[11] Tao, T. *Analysis I* [M]. Springer, 2006.

[12] ARMSTRONG, M., A. *Basic topology* [M]. Springer Science & Business Media, 2013.

[13] BAKER, A. *An Introduction to p-adic Numbers and p-adic Analysis* [M]. Citeseer, 2011.

[14] GOUVÊA, F.,Q. *p-adic Numbers* [M]. Springer, 1997.

[15] KATOK, S. *p-adic Analysis Compared with Real* [M]. American Mathematical Soc., 2007.